605. 雑記 V. $y''=f(x,y,y')$ ソノ二

南雲　道夫（阪大）

$\boxed{1}$ 第二階単独常微分方程式ノ境界値問題（與ヘラレタ二点ヲ通ル積分曲線ヲ求ムル問題）ニツイテハ，存在條件トシテ稍々好都合ナモノガ得ラレタ（本會134号596番）．然シ一意性ニツイテハ未ダ全ク思ハシイモノガ得ラレナイ。

次ニ境界値問題ニ関スル一ツノ不等式ト，ソノ應用トシテ一ツノ一意性ノ充分條件ヲ述ベル。〔前ノ論文ヲ知ラナクトモ Sudimiti ハ解ル〕

考ヘノ基礎ハ ∞^1 ダケノ曲線群ガ微分不等式 $y''\leqq f(x,y,y')$ ヲ満足シテヰルモノヲ利用スルコトデアル。

定理 1　方程式 $y''=f(x,y,y')$ ノ一ツノ積分ヲ $y=y_0(x)$ トシ，曲線群 $y=\varphi(x,\lambda)$ ハ λ ニツキ純増加連続デ

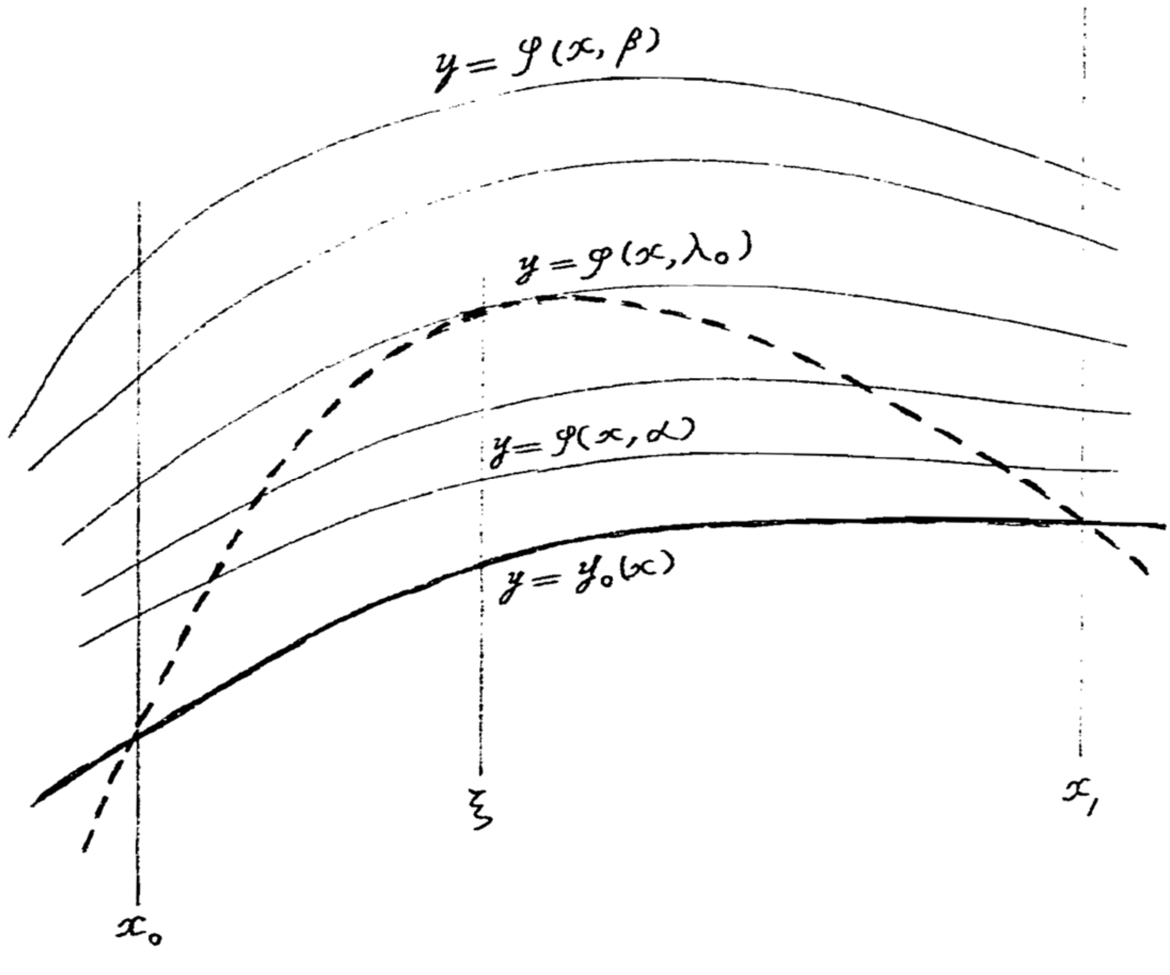
(1) $\varphi_{xx} < f(x, \varphi, \varphi_x) \quad (\alpha \leqq \lambda \leqq \beta)$

ヲ満足シ，且ツ $y_0(x_0) < \varphi(x_0, \alpha)$，$y_0(x_1) < \varphi(x, \alpha)$，$y_0(x) \leqq \varphi(x, \beta)$ $[x_0 \leqq x \leqq x_1]$ ナラバ，$x_0 \leqq x \leqq x_1$ デ

$$y_0(x) < \varphi(x, \alpha)$$

デアル。

(証明)：　若シモ $x_0 \leqq x \leqq x_1$ デ $y_0(x) < \varphi(x, \alpha)$ デナケレバ，圖ノ破線ノ示ス如ク，$y = y_0(x)$ ト点ヲ共有スル $y = \varphi(x, \lambda)$ ノ内デ λ ノ最大ナモノ $(\lambda = \lambda_0)$ ト，$x = \xi$ ニ於テ $(x_0 < \xi < x_1)$ $y = y_0(x)$ ニ切スル $(\alpha \leqq \lambda_0 \leqq \beta)$.



シカモ $y = y_0(x)$ ハ $y = \varphi(x, \lambda_0)$ ノ下側ニナケレバナラ

ナイ。之レハ $y_0(x)$ ガ積分ナルコトト，$\varphi(x,\lambda_0)$ ガ (1) ヲ満足スルコトト矛盾スル。（証明了）

(註) (1) ノ代リニ

$$\varphi_{xx} > f(x,\varphi,\varphi_x) \qquad (\beta' \leqq \lambda \leqq \alpha')$$

且ツ $y_0(x_0) > \varphi(x_0,\alpha')$，$y_0(x_1) > \varphi(x_1,\alpha')$，

$$y_0(x) \geqq \varphi(x,\beta')$$

トスレバ

$$y_0(x) > \varphi(x,\alpha')$$

トナル。

$\boxed{2}$ 上ノ結果ヲ應用シテ次ノ一意性ノ充分條件ガ得ラレル。

$\boxed{\text{定理2}}$ $y''=f(x,y,y')$ ノ一ツノ積分ヲ $y=y_0(x)$ トシ，曲線群 $y=\varphi(x,\lambda)$ ニ於テ $y_0(x)=\varphi(x,0)$，$\varphi(x,\lambda)$ ハ λ ニツキ純増加連続且ツ

$\lambda > 0$ ノ時 $\varphi_{xx} < f(x,\varphi,\varphi_x)$，〔$y_0(x)$ ノ上側〕

$\lambda < 0$ ノ時 $\varphi_{xx} > f(x,\varphi,\varphi_x)$，〔$y_0(x)$ ノ下側〕

ナラバ範囲 $x_0 \leqq x \leqq x_1$，$\varphi(x,\underline{\alpha}) \leqq y \leqq \varphi(x,\overline{\alpha})$ ニ於テ $y(x_0)=y_0(x_0)$，$y(x_1)=y_0(x_1)$ ナル積分曲線ハ $y_0(x)$ 只一ツニ限ル。 但シ $\underline{\alpha}<0$，$\overline{\alpha}>0$

（証明） $y_0(x)$ 以外ニ $y(x_0)=y_0(x_0)$，$y(x_1)=y_0(x_1)$ ナル積分ガアレバ，之レヲ $y^*(x)$ トシ，$y^*(x)$ ニ定理1及ビ(註)ヲ適用スレバ

$\lambda > 0$ ノ時 $\varphi(x,\lambda) > y^*(x)$

$\lambda < 0$ ノ時 $\varphi(x,\lambda) < y^*(x)$

ガ得ラレル。之レニヨリ $y^*(x)=y_0(x)$ トナル他ハナイ。

（証明了）

上ノ定理ニ於ケル $\varphi(x,\lambda)$ ヲ適当ニ選ブコトニヨリ，特殊ナ場合ニ於ケル一意性ノ充分條件ガ得ラレル。即チ

系1　$y''=f(x,y,y')$ ニ於テ $f(x,y,y')$ ガ y ニツキ純増加函数ナルトキニハ，境界値問題ハ只一ツノ解ヲ有ス。

（証明）定理2ニ於テ，$\varphi(x,\lambda)=y_0(x)+\lambda$ トスレバヨイ。

系2　$f(x,y,y')$ ガ $\rho(x)f_y+\rho'(x)f_{y'}-\rho''(x)>0$，但シ $\rho(x)>0$ $(x_0\leqq x\leqq x_1)$，ヲ満足スルトキニハ，$x_0\leqq x\leqq x_1$ ニ於ケル境界値問題ハ只一ツ解ヲ有ス。

（証明）定理2ニ於テ $\varphi(x,\lambda)=y_0(x)+\lambda\rho(x)$ ト置ケバヨイ。

以上ノ系ハ皆前ニ得タモノバカリデ，定理2ノ效力ハアマリアテニナラヌ感ガアルケレドモ，之レハ $\varphi(x,0)=y_0(x)$ ナルコトニヨリ，$y_0(x)$ ヲ含マヌ形式ノ簡単ナ條件ハアマリ得ラレズ，従ツテ前ニ出シタモノバカリトナツテシマツタ。若シ $y_0(x)$ ヲバ適当ニ処理スルコトガ出来レバ，未ダ他ニ種々役ニ立ツ條件ヲ求ムルコトガ可能デアルカモ知レナイ。